УДК 336.001.57.004

Глотов Є.О

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТИХ, СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ ТА АНУЇТЕТУ

Анотація. Розглянуто економіко-математичні залежності для розрахунків по ставці простих і складних відсотків при кредитах, позиках, інвестиціях. Розрахунки основані на системі поглядів вартості грошей в часі. Надається розрахунок майбутньої вартості внеску за різних умов інвестування. Розглянута задача з первинним внеском на депозит на початку періоду з внеском суми періодичного платежу.

Ключові слова. Відсоток, простий відсоток, складний відсоток, процентна ставка, майбутня вартість грошей, справжня вартість грошей, нарощування вартості, дисконтування вартості, період нарахування, інтервал нарахування, попередні платежі, подальші платежі, дискретний грошовий потік, безперервний грошовий потік, ануїтет.

Вступ. В даній статті досліджується універсальна математична модель для розрахунків простих, складних відсотків та ануїтету. Ці розрахунки засновані на системі поглядів вартості грошей в часі [1], [2]. Ця система поглядів полягає в тому, що вартість грошей з часом змінюється з урахуванням норми прибутку на фінансовому ринку. Тому потрібно знайти таку універсальну математичну модель яка дозволяє аналізувати прості, складні відсотки, вартість грошей при ануїтеті. Аналіз такої математичної моделі дає можливість використати її для розробки методики оцінки вартості цінних паперів. Це також дає змогу аналізувати вбудовані фінансові функції табличного процесора Excel та розробити єдине програмне забезпечення на основі універсальної математичної моделі.

Постановка задачі. Мета даної теми полягає в аналізі математичних залежностей для розрахунків нарощеної суми відсотка від первинного внеску при простих, складних відсотках та оцінки вартості грошей при ануїтеті. Для відповідних розрахунків потрібно дослідити одержання універсальної математичної моделі для типових розрахунків по ставці простих і складних відсотків при кредитах, позиках, інвестиціях.

Результати

Типові розрахунки по ставці простих відсотків

Для спрощення виведення формул для простих і складних розрахунків при кредитах, позиках, інвестиціях ми припускатимемо, що інтервал нарахування рівний періоду нарахуванню. Нарахування простих відсотків при позиках, кредитах і в цілому при інвестиціях відбувається так: якщо первинний внесок - pv (pv - present value) був зроблений на певний період часу, то на нього нараховуються відсотки, потім нарахована сума грошей за рахунок процентної ставки - r (r-rent – рента, per cent - відсоток) вилучається, в наступний період часу нараховується така ж сума грошей виходячи з первинної суми внеску (первинна внесок pv не вилучається), яка також вилучається і так далі. Виходячи з цього можна записати нарощену суму відсотка від первинного внеску (pv) за кожен період так:

за перший період: $I_1 = pv \cdot r_1$; за другий період: $I_2 = pv \cdot r_2$;

....

за n -й період: $I_n = pv \cdot r_n$,

якщо $r_1 = r_2 = ... = r_n = r$**,** за кожен період, тоді розрахунок суми простого відсотка в процесі нарощування вартості (компаундинга) за всі періоди можна записати так**:**

$$I_C = I_1 + I_2 + ... + I_n = pv \cdot r_1 + pv \cdot r_2 + ... + pv \cdot r_n = pv \cdot n \cdot r$$

Майбутня вартість внеску -fv (fv - future value) з урахуванням нарахованої суми простого відсотка визначається по формулі:

$$fv = pv + Ic = pv + n \cdot pv \cdot r = pv \cdot (1 + n \cdot r). \quad (1)$$

Типові розрахунки по ставці складних відсотків

По ставці складних відсотків внесок - pv робиться на певний термін, який може складатися з декількох періодів. Нарахована сума грошей за рахунок процентної ставки r не вилучається під час переходу грошей з одного періоду на іншій, впродовж всіх періодів часу, на відміну від нарахування простих відсотків. В цьому випадку необхідно враховувати коли був зроблений внесок (або була зроблена виплата), на початку періоду або в кінці. Для обліку цього введемо змінну type (type – тип) , яка може приймати всього два значення 0 і 1. Якщо змінна type приймає значення 0 тоді вважається, що внесок був зроблений в кінці періоду а якщо 1 то на початку. Тоді накопичення за перший період можна записати так:

$$fv = pv + pv \cdot r \cdot type = pv \cdot (1 + r \cdot type)$$

Накопичення за другий період:

$$fv = pv \cdot (1 + r \cdot type) + pv \cdot (1 + r \cdot type) \cdot r \cdot type = pv \cdot (1 + r \cdot type) \cdot (1 + r \cdot type) = pv \cdot (1 + r \cdot type)^2.$$

....

Накопичення за n-й період:

$$fv = pv \cdot (1 + r \cdot type)^n \quad (4)$$

Таким чином, коли type =1 тоді майбутня вартість внеску визначатиметься по такій залежності:

$$fv = pv \cdot (1 + r)^n \quad (5)$$

Якщо type = 0, тоді за перший період відсотки не налічуються і сума за перший період залишається pv, яка переходить на другий період і тоді за другий період майбутня вартість внеску буде такою:

$$fv = pv \cdot (1 + r \cdot type) = pv \cdot (1 + r).$$

В цьому випадку для другого періоду type =1. Міркуючи таким чином за n – й період майбутня сума внеску розраховуватиметься по такій формулі:

$$fv = pv \cdot (1 + r \cdot type)^{(n-1)}. \quad (6)$$

При розрахунку справжньої вартості грошових коштів в процесі дисконтування по складним відсоткам використовується наступна формула:

$$pv = \frac{fv}{(1 + r)^n} \quad (8)$$

При визначенні середньої процентної ставки, використовуваної в розрахунках вартості грошових коштів по складним відсоткам, застосовується наступна формула:

$$r = \left(\frac{fv}{pv} \right)^{1/n} - 1 \cdot \quad (9)$$

Вона одержана з формули (1.8). В літературі часто замість символа **r** використовують символ **i**. Тривалість загального періоду платежів, виражена кількістю його інтервалів, в розрахунках вартості грошових коштів по складних відсотках визначається шляхом логарифмування по наступній формулі:

$$n = \frac{\log\left(\frac{fv}{pv}\right)}{\log\left(1 + i\right)}. \qquad (10)$$

Визначення ефективної середньорічної процентної ставки в процесі нарощування вартості грошових коштів по складних відсотках здійснюється по формулі:

$$i_e = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1. \qquad (11)$$

Приклад 1. Необхідно визначити ефективну середньорічну процентну ставку за наступних умов: грошова сума 1000 у.о. поміщена в комерційний банк на депозит строком на 2 роки; річна процентна ставка, по якій щокварталу здійснюється нарахування відсотка, складає 13 % . Підставляючи ці значення у формулу 11, отримаємо:

$$i_e = \left(1 + \frac{0{,}13}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}1364 = 13{,}64\ \%.$$

Результати розрахунків показує, що умови розміщення грошової суми строком на 2 роки під 13 % річних при щоквартальному нарахуванні відсотків, рівнозначні умовам нарахування цих відсотків один раз в рік під 13, 64% річних (13,64 складають розмір ефективної або порівнянної процентної ставки). При оцінці вартості грошей в часі по складних відсотках необхідно мати на увазі, що на результат оцінки впливає не тільки використовувана ставка відсотка, але і число інтервалів виплат в перебігу одного і того ж загального платіжного періоду. Іноді виявляється вигіднішим інвестувати гроші під меншу ставку відсотка, але з великим числом інтервалів протягом передбаченого періоду платежу.

Приклад 2. Перед інвестором стоїть завдання розмістити 1000 у.о. на депозитний внесок строком на один рік. Один банк пропонує інвесторові виплачувати дохід по складних відсотках у розмірі 23% в квартал; другий - у розмірі 30% один раз в чотири місяці; третій – у розмірі 45% двічі в році; четвертий – у розмірі 100% один раз в році. Для того, щоб визначити, який варіант інвестування кращий, розглянемо таблицю 1.1. Порівняння варіантів показує, що найбільш ефективним є 1-й варіант.

Таблиця 1.1.

Розрахунок майбутньої вартості внеску за різних умов інвестування

	A	B	C	D	E	F	G
1	№ варіанту	теперішня вартість внеску	Ставка відсотка	Майбутня вартість вкладу в кінці кожного періоду			
2				1	2	3	4
3	1	1000	23,00%	1230	1512,9	1860,867	2288,866
4	2	1000	30,00%	1300	169	219,7	
5	3	1000	45,00%	1450	2102,5		
6	4	1000	100,00%	2000			

Розглянемо задачу коли був зроблений первинний внесок pv (на депозит або взятий у борг) на початку періоду, і крім того була внесена сума періодичного платежу pmt (payment – платіж) не рівна нулю. Величини pmt та r, схема платежів type залишаються незмінними протягом строку (n) дії договору. Тоді накопичення за перший період складе:

$$fv = pv + pmt + pv \cdot r + pmt \cdot r \cdot type = pv \cdot (1+r) + pmt \cdot (1+r \cdot type).$$

Сума $pv \cdot (1+r) + pmt \cdot (1+r \cdot type)$ перейде на другий період і на неї будуть також нараховані відсотки: $(pv \cdot (1+r) + pmt \cdot (1+r \cdot type)) \cdot r$. До цієї суми будуть додані періодичні платежі pmt і процентна надбавка на них: $pmt \cdot (1+r \cdot type)$. Тоді накопичення за другий період можна буде записати так:

$fv = pv \cdot (1+r) + pmt \cdot (1+r \cdot type) + (pv \cdot (1+r) + pmt \cdot (1+r \cdot type)) \cdot r + pmt + pmt \cdot r \cdot type = pv \cdot (1+r) + pmt \cdot (1+r \cdot type) + pv \cdot (1+r) \cdot r + pmt \cdot (1+r \cdot type) \cdot r + pmt + pmt \cdot r \cdot type = pv \cdot (1+r) \cdot (1+r) + pmt \cdot (1+r \cdot type) \cdot (1+r) + pmt \cdot (1+r \cdot type) = pv \cdot (1+r)^2 + pmt \cdot (1+r \cdot type) \cdot (1+r+1)$.

Щоб форма мала певний вигляд перетворимо вираз (1+r+1) в такий вигляд: $(2+r) \cdot r/r = (2 \cdot r + r^2 + 1 - 1)/r = ((r+1)^2 - 1)/r$.

Запишемо накопичення за другий період так:

$$fv = pmt \cdot \frac{\left((1+r)^2 - 1\right)}{r} \cdot (1 + r \cdot type) + pv \cdot (1+r)^2$$

Міркуючи аналогічним чином отримаємо за n-й період [3]:

$$fv = pmt \cdot \frac{\left((1+r)^n - 1\right)}{r} \cdot (1 + r \cdot type) + pv \cdot (1+r)^n, \qquad (12)$$

де pmt - сума періодичного платежу, від англійського слова payment – платіж; r - процентна ставка за один обліковий період; type - тип виплат: 1 - на початку періоду, 0 - в кінці облікового періоду; n - кількість облікових інтервалів часу, по яких здійснюється кожен платіж., у загальному періоді часу; pv - первинний внесок, «справжня» вартість внеску; fv - «майбутня» вартість внеску. Величини: pv, pmt, r, type залишаються незмінними протягом терміну дії договору (n), а нарахована сума грошей за рахунок процентної ставки (r) не вилучається. У розрахунках як правило враховується тривалість періоду – місяць, квартал, півроку, рік. Обліковому інтервалу часу певної тривалості (n) відповідає процентна ставка (r). Якщо процентна ставка дається за рік, а обліковий період - частка року, то в розрахунках використовується пропорційна величина річної процентної ставки. У фінансових функціях MS Excel за розрахунком грошових потоків важливо напрями потоку: «до нас» - із знаком плюс, «від нас» - із знаком мінус. При цьому використовуються моделі задач двох видів:

1. Накопичення капіталу, розміщеного на депозиті у вигляді внеску (або відданого у вигляді позики «в зростання»), величина pv негативна, величина pmt може приймати будь-яке значення, у тому числі і 0. В кінці терміну дії договору повертається позитивна сума fv;

2. Користування позиковим капіталом, величина pv - позитивна, величина pmt - негативна (регулярні виплати).

Вище ми розглядали задачі коли величина pmt була рівна нулю.

Окремий клас завдань може бути розглянутий коли pv = 0. Це указує на те, що формула (12) є універсальною.

Для цього розробимо методику оцінки вартості грошей при ануїтеті (коли pv = 0).

Враховуючи, що ануїтет це щорічний внесок (фр. annuite – щорічний внесок), тоді необхідно розглядати завдання коли період платежів складає певна кількість років а обліковий інтервал часу один рік. При pv = 0 формула 12 прийме вигляд:

$$fv = pmt \cdot \frac{\left((1+r)^n - 1\right)}{r} \cdot (1 + r \cdot type) \tag{13}$$

При розрахунку майбутньої вартості ануїтету на умовах попередніх платежів (пренумерандо), коли плата здійснюється на початку облікового інтервалу часу, тоді type = 1 і формула (13) прийме вигляд [4]:

$$fv_{pre} = pmt \cdot \frac{\left((1+r)^n - 1\right)}{r} \cdot (1 + r) \tag{14}$$

Приклад 3. Необхідно розрахувати майбутню вартість ануїтету, здійснюваного на умовах попередніх платежів (пренумерандо), при наступних даних: період платежів по ануїтету передбачений в кількості 4 років;

інтервал платежів по ануїтету складає один рік (платежі вносяться на початку року); сума кожного окремого платежу складає 1000 у.е.; процента ставка, що використовується складає 13% в рік .Майбутня вартість ануїтету:

$$fv_{pre} = 1000 \cdot \frac{\left((1+0{,}13)^4 - 1\right)}{0{,}13} \cdot (1 + 0{,}13) = 5480{,}27 \text{ у.о.}$$

При розрахунку майбутньої вартості ануїтету на умовах подальших платежів (постнумерандо) type = 0 і формула (13) прийме вигляд:

$$fv_{post} = pmt \cdot \frac{\left((1+r)^n - 1\right)}{r} \tag{15}$$

Приклад 4. Необхідно розрахувати майбутню вартість ануїтету, здійснюваного на умовах внеску платежів в кінці року на основі даних попереднього прикладу:

$$fv_{post} = pmt \cdot \frac{\left((1+r)^n - 1\right)}{r} = 1000 \cdot \frac{\left((1+0{,}13)^4 - 1\right)}{0{,}13} = 4849{,}08 \text{ у.о.}$$

Таким чином в попередньому прикладі інвесторові забезпечена набагато більша сума доходів, це обумовлено тим, що облікових інтервалів нарахування в попередньому прикладі на один більше. Розглянемо клас завдань в яких необхідно розрахувати справжню вартість ануїтету з умовами пренумерандо і постнумерандо. Це задачі в яких необхідно знайти суму грошей, яку необхідно внести до банку, щоб отримувати певні суми грошей, протягом певного періоду часу. При розрахунку справжньої вартості ануїтету, здійснюваного на умовах попередніх платежів (пренумерандо) використовується наступна формула:

$$pv_{pre} = pmt \cdot \frac{\left(1 - (1+r)^{-n}\right)}{r} \cdot (1 + r), \tag{16}$$

де pv_{pre} - справжня вартість ануїтету, здійснюваного на умовах попередніх платежів (пренумерандо); pmt - член ануїтету, що характеризує розмір окремого платежу. Як ми бачимо формула (16) була отримана на основі формули (14). З урахуванням того, що справжня вартість ануїтету протилежна майбутній вартості грошей тому і знаки в чисельнику дробу для кількості інтервалів і у одиниці змінені на зворотні.

Приклад 5. Необхідно розрахувати справжню вартість ануїтету, здійснюваного на умовах попередніх платежів (пренумерандо), при наступних даних: період платежів по ануїтету передбачений в кількості 4 років; інтервал платежів по ануїтету складає один рік (платежі вносяться на початку року); сума кожного окремого платежу складає 1000 у.е.; використовувана для нарощування вартості процентна ставка складає 13% в рік.

Справжня вартість ануїтету:

$$pv_{pre} = 1000 \cdot \frac{\left(1-(1+0{,}13)^{-4}\right)}{0{,}13} \cdot (1+0{,}13) = 3361{,}15 \text{ у.о.}$$

Це означає, що якщо ми внесемо внесок у розмірі 3361,15 у.о. на чотири роки, то ми зможемо отримувати щорічно по 1000 у.о.

При розрахунку справжньої вартості ануїтету, здійснюваного на умовах подальших платежів (постнумерандо), застосовується наступна формула:

$$pv_{post} = pmt \cdot \frac{\left(1-(1+r)^{-n}\right)}{r} \tag{17}$$

де pv_{post} - справжня вартість ануїтету, здійснюваного на умовах подальших платежів (постнумерандо); pmt - член ануїтету, що характеризує розмір окремого платежу.

Приклад 6. Необхідно розрахувати справжню вартість ануїтету, здійснюваного на умовах подальших платежів (постнумерандо), по даним, викладеними в попередньому прикладі.

Справжня вартість ануїтету на умовах подальших платежів (постнумерандо) рівна:

$$\mathrm{pv}_{\mathrm{post}} = 1000 \cdot \frac{\left(1-(1+0{,}13)^{-4}\right)}{0{,}13} = 2974{,}47 \text{ у.о.}$$

У першому випадку в процесі дисконтування інвесторові гарантована набагато більша сума доходу в справжній вартості.

При розрахунку розміру окремого платежу при заданій майбутній вартості fv_{post} ануїтету використовується наступна формула:

$$pmt = fv_{post} \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1} \tag{18}$$

де pmt - розмір окремого платежу по ануїтету; fv_{post} - майбутня вартість ануїтету.

При розрахунку розміру окремого платежу при заданій поточній вартості ануїтету використовується така формула:

$$pmt = pv_{post} \cdot \frac{r(1+r)^n}{1-(1+r)^n} \tag{19}$$

де pmt - розмір окремого платежу по ануїтету (при відомій поточній його вартості); pv_{post} - справжня вартість ануїтету (здійснюваного на умовах подальших платежів). Формула одержана на основі загальної формули (12), коли fv = 0.

Висновки. Наукова новизна полягає в дослідженні універсальної математичної моделі для розрахунків простих, складних відсотків та ануїтету. Теоретичне значення досліджень полягає у використанні універсальної математичної моделі при розробці методики оцінки вартості грошей при ануїтеті. Практичне значення полягає в тому, що це дає змогу розробити програмне забезпечення на мові VBA, яке згрупує усі фінансові функції які є в табличному процесорі Excel для їх практичного використання. Соціально-економічний ефект визначається з впровадженням наукових досліджень в учбовий процес. Перспективи подальших наукових розробок: використання універсальної математичної моделі для розробки методики оцінки вартості цінних паперів.

Стаття надсилається для публікації лише до збірника наукових праць «Фінансово – кредитна діяльність:проблеми теорії та практики».

Література

1. Глотов Є.О. Моделювання фінансових операцій у середовищі Microsoft Excel: Навчальний посібник / Є.О. Глотов, С.М. Зацеркляна. – Х.: ХІУ, 2006. – 257 с.

2. Брауна С. Дж., Крипмена М.П. Количественные методы финансового анализа: Підручник / С. Дж. Брауна, М.П. Крипмена. – М.: ИНФРА-М, 1996. - 336 с.

3. Ильина О.П. Информационные технологии бухгалтерского учета: Учебник / О.П. Ильина. - СПб.: Питер, 2001. – 688 с.: ил.

4. Бланк И.А. Инвестиционный менеджмент: Учебный курс / И.А. Бланк. - К.: Эльга - Н, Ника Центр, 2002.- 448 с.

Summary. Ekonomiko-mathematical dependences are considered for calculations on the rate of simple and complex percent at credits, loans, investments. Calculations are based on the system of looks of value of monies in time. The calculation of future cost of payment is given at different terms investing. A task is considered with primary payment on a deposit at the beginning of period with payment of sum of periodic payment.

Keywords: Percent, simple percent, complex percent, percent rate, future value of monies, real value of monies, increase of cost, discounting of cost, period of the adding, interval of the adding, previous payments, subsequent payments, discrete money thread, continuous money thread, annuity.

Стаття надійшла до редакції 4.01.2011